Matematika A2 – funkce více proměnných (1)

1. Definiční obory funkcí více proměnných:

(najděte definiční obory funkcí, u funkcí dvou proměnných se pokuste def. obory nakreslit, je def. obor množina omezená nebo uzavřená?)

$f(x,y) = x+\sqrt{y}$; $f(x,y)=\sqrt{x+\sqrt{y}}$; $f(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y}}$;

$f(x,y)=\sqrt{\ln(xy)}$; $f(x,y)=\ln(xy-1)$; $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$;

$f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$; $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}$; $f(x,y)=\arcsin\frac{y}{x+1}$;

$f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}\cdot\ln(xy)$; $f(x,y)=\sqrt{\sin\pi(x^2+y^2)}$; $f(x,y)=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$;

$f(x,y,z)=\frac{1}{1-(x^2+y^2-z^2)}$; $f(x,y,z)=\sqrt{z-x^2-y^2}$; $f(x,y,z)=\arcsin\frac{z^2}{x^2+y^2}$;

$f(x,y,z)=\sqrt{\ln(x^2+y^2+z^2)}$;

2. Grafy funkcí dvou proměnných

(pokuste se představit si „podobu" grafu – např. pomocí řezů)

$f(x,y)=-2$; $f(x,y)=x$; $f(x,y)=1-y$; $f(x,y)=2-x-y$;

$f(x,y)=x^2+1$; $f(x,y)=9-y^2$; $f(x,y)=x^2+y^2$; $f(x,y)=x^2+4y^2$;

$f(x,y)=1-x^2-y^2$; $f(x,y)=x^2-y^2$; $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$; $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$;

$f(x,y)=-\sqrt{4-x^2-y^2}$; $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$; $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$;

3. Limita a spojitost

a) Spočtěte limity: $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,-1,1)}\frac{3x+y+z}{x^2+y^2+z^2}$; $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,-1,1)}\frac{3x+y+z}{x^2+y^2-z^2}$;

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to\\ \to(1,1,-2)}} \frac{1}{x+y-z}\ ;\quad \lim_{\substack{(x,y)\to\\ \to(0,0)}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}\ ;\quad \lim_{\substack{(x,y)\to\\ \to(0,0)}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\ ;$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x,y\neq 0}} (x+y)\cdot\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{y}\ ;\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\cdot\cos\frac{1}{x^2+y^2}\ ;$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,a)\\ a\neq 0}} \frac{\sin xy}{xy}\ ;\quad \lim_{\substack{(x,y)\to\\ \to(0,a)}} \frac{\sin xy}{x}\ ;\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}\ ;$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^2y^2)}{x^2+y^2}\ ;\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}\ ;$$

b) Ukažte, že neexistují limity

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}\ ;\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ ;$$

Ukažte, že také neexistuje $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$, i když

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0 .$$

c) (i) Vyšetřete spojitost funkcí z příkladů 1, 2, 3.

(ii) Rozhodněte, zda lze spojitě dodefinovat funkce $f(x,y)$ v bodě $(0,0)$, když:

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\ ;\quad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}\ ;\quad f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ ;$$

(iii) Rozhodněte, zda jsou spojité funkce:

a) $$f(x,y) = \begin{cases} \arcsin\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

b) $$f(x,y) = \begin{cases} \cos\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 1, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

4. Parciální derivace

a) spočítejte parciální derivace 1. a 2. řádu následujících funkcí (všude, kde existují), ukažte, že smíšené derivace 2. řádu jsou zaměnitelné:

(i) $f(x,y)$: x^2+y; x^2y; $x\sqrt{y}+\frac{y}{x}$; e^{x^2-y}; e^{x^2y}; x^y;
$\ln(xy-1)$; $e^{-\frac{x}{y}}$; $\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$; $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{x-y}$;

(ii) $f(x,y,z)$: e^{xyz}; $x^{\frac{y}{z}}$; $xy+yz+xz$;

(iii) ukažte, že funkce $f(x,y)=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ splňuje $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.
(v $R-\{0,0\}$)

b) totální diferenciál, tečná rovina, lineární aproximace:

(i) ukažte, že daná funkce je diferencovatelná (v daném bodě nebo uvnitř definičního oboru), určete její gradient, totální diferenciál, rovnici tečné roviny v bodě $[x_0,y_0,f(x_0,y_0)]$, když:
$f(x,y)=\ln(y-x^2)$ v $(1,0)$; $f(x,y)=e^{x^2-y}$ v $(1,1)$;
$f(x,y)=x^2+4y^2$ v bodě $(1,2)$; $f(x,y)=\frac{x}{y}$ v bodě $(-1,3)$;
$f(x,y)=\ln(xy-1)$ v $(1,2)$;

(ii) aproximujte lineární funkcí $\sqrt{x^2+y^3}=f(x,y)$ v okolí bodu $(1,2)$ a přibližně spočítejte $\sqrt{(1{,}02)^2+(1{,}97)^3}$;

(iii) ukažte, že pro malá x přibližně platí
$$\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1+xy}\doteq x+y$$

(iv) ukažte, že funkce $f(x,y,z)=xy+yz+xz$ je diferencovatelná v E^3; najděte její totální diferenciál.